Exercice 1 :

Calculer dans chaque cas, le nombre dérivé de la fonction f au point a :

1) $f(x) = \sin(2x)$; $a=\frac{\pi}{3}$

2) $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & si\ \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; a=0

Exercice 2 :

Etudier dans chaque cas la dérivabilité de f à droite et à gauche de a :

1) $f(x) = x|x| + x$; a=0 ; 2) $f(x) = |x^2 - 4|$; a=2

3) $f(x) = x\sqrt{|x^2 + x|}$; $a = -1$; 4) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x} & si\ \ x > 4 \\ \frac{12+\sqrt{x}}{12} & si\ \ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$; a=4

5) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & ;\ \ x \leq 0 \\ -\sin(\frac{x}{2}) & ;\ \ x > 0 \end{cases}$; a = 0

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} ax^2 \sin(x-2) & ;\ \ x \geq 2 \\ 3x^2 + bx & ;\ \ x < 2 \end{cases}$

Déterminer a et b pour que la fonction f soit dérivable en 2

Exercice 4 :

Soit la fonction telle que : $f(x) = \sqrt{x}$

1) Donner l'approximation par une application affine de f(1+h) quand h tend vers 0

2) Montrer que : $(\forall\ h \in IR^+)$; $\left|f(1+h) - (1 + \frac{1}{2}h)\right| \leq \frac{h^3}{8}$

3) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,002}$ et donner l'erreur commise

Exercice 5 :

Calculer dans chaque cas la fonction dérivée de la fonction f en précisant $D_{f'}$:

1) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 7x + 2$; 2) $f(x) = (3x^2 + 1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = 3 \sin x \cos x$

4) $f(x) = tan^3(x)$; 5) $f(x) = xsin^4(x)$; 6) $f(x) = cos^2(3x)sin^3(2x)$

7) $f(x) = \frac{3}{x^2-3x+2}$; 8) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$; 9) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

10) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}}$; 11) $f(x) = \sqrt{4cos^2 - 3}$

Exercice 6 :

Etudier dans chaque cas les variations de la fonction f :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; 2) $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x^2+x-2}$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} - 2x$; 5) $f(x) = \sin(x) + cos^2(x)$; 6) $f(x) = \sin(2x) + \cos(2x)$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x \ ; \ x < 0 \\ x^3 - x^2 \ ; \ x \geq 0 \end{cases}$; 8) $f(x) = \frac{cos^2 x+1}{\sin(2x)}$

Exercice 7 :

Soit la fonction f telle que : $f(x) = x^2 + ax + b$

Déterminer a et b sachant que la droite : (D) : y= $2x - 7$ est tangente à la courbe (C_f) de f

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^5+x^3+x^2+1}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)+\cos x-1}{x}$; 3) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x \sin(2x)}{x-\pi}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-\sin x}+x^2+x-1}{x}$; 5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sin^3(2x)+\cos(2x)+1}{x-\frac{\pi}{2}}$

Exercice 9 :

Calculer les dérivées des suivantes sans préciser le domaine de dérivabilité :

1) $f(x) = \frac{2 \sin x}{2\cos^2(x)}$; 2) $g(x) = \cos^2(4x)\sin^3(2x)$

3) $h(x) = (\frac{3x+1}{x^2+2x})^2$; 4) $j(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{2x^2+1}}$

Exercice 10 :

Calculer les limites suivantes en utilisant la notion de dérivabilité :

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{3cos^2 x-sin^2 x}{x-\frac{\pi}{3}}$; 2) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sqrt{x}\cos x+\sqrt{\pi}}{x-\pi}$; 3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^3 \sin x - a^3 \sin a}{x-a}$

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x|x-3|}{x+1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer ses limites aux bornes de D_f

2) Etudier la dérivabilité de f en 3 et interpréter graphiquement les résultats

3) Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty$;-1[$\cup] - 1; 3[$ et sur]3 ;+∞[

4) Donner une équation de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse 1

5)Dresser le tableau de variation de f

Exercice 12 :

Soit la fonction $\quad f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

1-Déterminer le domaine de définition de f

2-Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

3- Montre que f est dérivable à gauche en 0 et donner sa dérivée à gauche en 0

4-Montrer que $:f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x}{x-2}}}$ $(\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[)$

5-Donner l'approximation affine de f au voisinage de 4

6 -Dresser le tableau de variation de f

Exercice 13 :

Soit la fonction f définie par :$\begin{cases} f(x) = x - \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} & ; \ x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+2} & ; \ x < 1 \end{cases}$

1-Déterminer D_f et montrer que $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2-Etudier la dérivabilité de f en 1 à droite et à gauche puis interpréter graphiquement les résultats

3-a-Etudier la position de (C_f) par rapport à la droite (Δ)d'équation : y = x – 2 sur]1 ;+∞ [

b- Etudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de +∞

c- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et donner une interpréter graphique à ce résultat

4- Résoudre dans]-∞; 1[l'inéquation : f(x)< 1 et en déduire la position de(C_f) par rapport à l'asymptote horizontale

5-a-Montrer que :$(\forall x > 1)f'(x) = \frac{(x^2-2)(x^4+x^2+2)}{x^2(x^2\sqrt{x^2-1}+2)\sqrt{x^2-1}}$

$(\forall x < 1)f'(x) = \frac{2x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$

b- Donner le tableau de variation de f

c- Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

Exercice 14 :

Soit la fonction f définie par :$\begin{cases} f(x) = x - \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} & ; \ x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+2} & ; \ x < 1 \end{cases}$

1) Déterminer D_f et montrer que $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 à droite et à gauche puis interpréter graphiquement les résultats

3) a-Etudier la position de (C_f) par rapport à la droite (Δ)d'équation : y = x – 2 sur]1 ;+∞ [

b- Etudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de +∞

c- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et donner une interpréter graphique à ce résultat

4) Résoudre dans]-∞; 1[l'inéquation : f(x)< 1 et en déduire la position de(C_f) par rapport à l'asymptote horizontale

5) a-Montrer que :$(\forall x > 1)f'(x) = \frac{(x^2-2)(x^4+x^2+2)}{x^2(x^2\sqrt{x^2-1}+2)\sqrt{x^2-1}}$ et que $(\forall x < 1)f'(x) = \frac{2x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$

b- Donner le tableau de variation de f

c- Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

Exercice 15 :

Soit la fonction f définie par : f(x) $= \sqrt{x^2 - 4x + 3} - (x - 2)$

1) Déterminer le domaine de définition de f :D_f
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat
3) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C_f)au voisinage de -∞
4) Etudier la dérivabilité de f à droite de 3 et à gauche de 1 et interpréter graphiquement les résultats
5) Calculer $f'(x)$ sur]- ∞ ; 1] ∪ [3; +∞ [
6) Montrer que f est croissante sur [3 ; +∞ [et décroissante sur]-∞ ; 1] et donner son tableau de variation
7) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite d'équation :y= -2x+4
8) Construire (C_f)
9) Soit g(x) $= \sqrt{x^2 - 4x + 3} - |x - 2|$

   a) Vérifier que $D_g = D_f$

   b)Montrer que la droite (D) d'équation : x=2 est axe de symétrie pour (C_g)

   c) Construire dans le même repère précédent (C_g)

Exercice 16 :

Une urne contient 5 boules blanches numérotées :1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 et 4 boules noires numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 2 et 3 boules rouges numérotées : 0 ; 1 ; 2

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne

1- Quel est le nombre de cas possibles ?
2- Quel est le cardinale de :

   A :≪ $Avoir 3\ boules\ de\ méme\ couleur$ ≫

   B :≪avoir au plus une boule blanche≫

   C : Avoir exactement une boule blanche et exactement une boule qui porte le numéro 1

   D : Avoir exactement une boule blanche et au moins une boule qui porte le numéro 1

Exercice 17 :

1- a- Vérifier que : $n^3 + 2n^2 + 14 = (n+1)(n^2 + n - 1) + 15$

   b- Montrer que : $(n^3 + 2n^2 + 14) \wedge (n+1) = (n+1) \wedge 15$

   c- Déterminer n ∈ ℤ tel que : (n+1) divise $(n^3 + 2n^2 + 14)$

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: $\overline{5}x^2 + x - \overline{4} = \overline{0}$

3- Déterminer a et b de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\begin{cases} a \wedge b = 7 \\ a \vee b = 84 \end{cases}$

Exercice 18 :

Une urne contient 4boules blanches et 3 boules noires. On tire une boule de l'urne :

Si elle est blanche on la remet dans l'urne et on tire simultanément 2boules de l'urne

Si elle est noire on ne la remet pas dans l'urne et on tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne

1- Quel est le nombre de cas possibles ?
2- Quel est le nombre de cas pour avoir 3 boules blanches ?
3- Quel est le nombre de cas pour avoir exactement 2 boules blanches ?
4- Quel est le nombre de cas pour avoir au plus 2 boules blanches ?

Exercice 19 :

1) Soit a et b de $\mathbb{Z}$. Montrer que 3 / ab(a^2-b^2)

2) Déterminer x de $\mathbb{Z}$ tel que x-1 / x+3 et

3) Déterminer x de $\mathbb{Z}$ tel que x +2 / x^2+2

4) Déterminer b de IN tel que : $600 < b < 1100$ et 630 ∧ b =105

5) Déterminer a et b de IN tel que : a ∧ b =354 et a+ b = 5664

Exercice 20 :

Soit n ∈ $IN^\star$ on pose a = 5n^2+7 et b = n^2+2

1) Montrer que d / a et d / b ⟹ d / 3
2) Montrer que a ∧ b =3 ⟹ (∃ k ∈ IN) n^2-1 = 3k
3) Déterminer H = { $n \in IN/$ a ∧ b =3 }

Exercice21 : Soit n ∈ $IN^\star$ on pose x = n-1 et y = n^2- 3n +6

1) Soit d'un diviseur commun à x et à y. Montrer que d / 4
2) En déduire que :x ∧ y = x ∧ 4
3) Déterminer x ∧ y suivant les valeurs de n

Exercice 22 : Déterminer x et y de IN dans les cas suivants :

1) (x ∨ y) − (x∧ y) =77

2) x^2 - y^2 =1445 et $x \wedge y = 17$

Exercice 23 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : 1274x - 275y =1

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\bar{3}\, x^2 - x + \bar{1} = \bar{0}$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 11[31] \end{cases}$